Ministerul Educației şi Cercetării
Serviciul Național de Evaluare şi Examinare

A 55-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa județeană şi a Municipiului Bucureşti
8 martie 2003

CLASA A XI-A

Subiectul 1

În reperul cartezian xOy se consideră punctele coliniare $A_i(x_i, y_i),\ i=\overline{1,4}$, astfel încât să existe matrice inversabile $M \in \mathcal{M}_4(\mathbf{C})$ în care primele două dintre linii sunt (x_1, x_2, x_3, x_4) şi (y_1, y_2, y_3, y_4). Arătați că suma elementelor matricei M^{-1} nu depinde de matricea M dată.

Subiectul 2

Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcție continuă în 0 şi 1, care are limite laterale în orice punct şi care verifică

$$f(x-0) \le f(x) \le f(x+0)$$

pentru orice $x \in (0,1)$. Arătați că:

a) pentru mulțimea $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \ge x\}$, avem $\sup A \in A$;

b) există $x_0 \in [0,1]$ astfel ca $f(x_0) = x_0$.

Subiectul 3

a) Arătați că orice matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{C})$ se poate scrie ca suma a 4 matrice $B_i \in \mathcal{M}_4(\mathbf{C}),\ i=\overline{1,4}$ de rang 1.

b) Arătați că I_4 nu se poate scrie ca suma a mai puțin de 4 matrice de rang 1.

Subiectul 4

Fie $\alpha > 1$ şi $f:\left[\frac{1}{\alpha},\alpha\right]\to\left[\frac{1}{\alpha},\alpha\right]$ bijectivă. Dacă $f^{-1}(x)=\frac{1}{f(x)}$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{\alpha},\alpha\right]$, arătați că:

a) f are cel puțin un punct de discontinuitate;

b) dacă f este continuă în 1, atunci f are o infinitate de puncte de discontinuitate;

c) există o funcție f care verifică condițiile din enunț şi are un număr finit de puncte de discontinuitate.

Timp de lucru: 3 ore